

## Adatbank önellenőrzéshez

- (1) Egy gazdálkodónak el kell döntenie, az adott évben hány hektár árpát és hány hektár kukoricát ültessen. Egy hektár hozama árpa ültetése esetén 25 mázsa, munkaigénye pedig hetente 10 óra. Egy hektár hozama kukorica ültetése esetén 10 mázsa, munkaigénye pedig hetente 4 óra. Az árpa mázsánként 4 euróért adható el, a kukorica eladási ára mázsánként 3 euró. A gazdálkodónak hét hektár földje van és heti 40 óra munkát tud összesen a földekre fordítani. A szövetkezeti előírás értelmében az adott évben legalább 30 mázsa kukoricát kell termelnie. Adjuk meg a feladat matematikai modelljét, ha a gazdálkodó célja az ültetésből származó teljes jövedelmének maximalizálása! Határozzuk meg az optimális megoldást!

**Megoldás:** A feladat modelljében jelölje  $x_1$  azt, hogy hány hektár árpát,  $x_2$  pedig azt, hogy hány hektár kukoricát ültet a gazdálkodó! Ekkor a matematikai modell:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

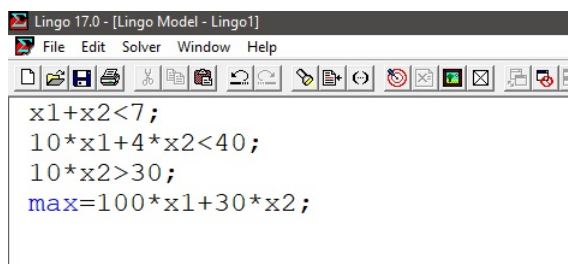
$$x_1 + x_2 \leq 7$$

$$10x_1 + 4x_2 \leq 40$$

$$10x_2 \geq 30$$

$$z = 100x_1 + 30x_2 \rightarrow \max$$

A modell felvétele a Lingóban:

The image shows a screenshot of the Lingo 17.0 software window. The title bar reads "Lingo 17.0 - [Lingo Model - Lingo1]". The menu bar includes "File", "Edit", "Solver", "Window", and "Help". Below the menu bar is a toolbar with various icons for file operations, editing, and solving. The main text area contains the following Lingo model code:

```
x1+x2<7;  
10*x1+4*x2<40;  
10*x2>30;  
max=100*x1+30*x2;
```

## Az eredményjelentés:

Lingo 17.0 - [Solution Report - Lingo1]		
File Edit Solver Window Help		
Global optimal solution found.		
Objective value:	370.0000	
Infeasibilities:	0.000000	
Total solver iterations:	2	
Elapsed runtime seconds:	0.30	
Model Class:	LP	
Total variables:	2	
Nonlinear variables:	0	
Integer variables:	0	
Total constraints:	4	
Nonlinear constraints:	0	
Total nonzeros:	7	
Nonlinear nonzeros:	0	
Variable	Value	Reduced Cost
X1	2.800000	0.000000
X2	3.000000	0.000000
Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	1.200000	0.000000
2	0.000000	10.00000
3	0.000000	-1.000000
4	370.0000	1.000000

A feladat optimális megoldása:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 2.8 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 370.$$

Tehát 2.8 hektár árpát és 3 hektár kukoricát kell a gazdálkodónak ültetnie ahhoz, hogy a jövedelmét maximalizálja. Ekkor a jövedelme 370 euró. Ezzel a programmal a rendelkezésére álló 7 hektárból 1.2 hektáron nem gazdálkodik, viszont a munkaidőt teljesen kihasználja, és biztosítja a szövetkezeti előírást azzal, hogy pontosan 30 mázsa kukoricát termel. Ezeket az információkat az eltérésvektorból tudjuk leolvasni.

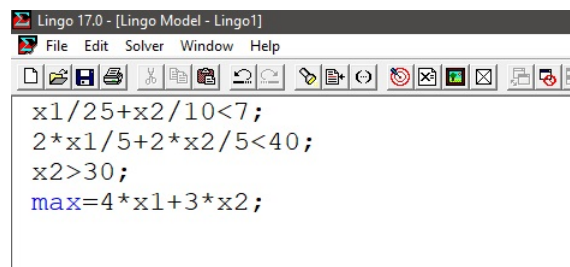
- (2) Módosítsuk az előző feladat modelljét, a döntési változókat értelmezzük olyan módon, hogy  $x_1$  az árpából termelt mennyiséget,  $x_2$  pedig a kukoricából termelt mennyiséget jelölje mázsában! Hogyan kell ekkor átírunk a lineáris programozási modellt és mi lesz az optimális megoldás?

**Megoldás:** Ebben az esetben a döntési változókat értelmezzük olyan módon, hogy  $x_1$  az árpából termelt mennyiséget,  $x_2$  pedig a kukoricából termelt mennyiséget jelölje mázsában! Ekkor 1 mázsa árpa termeléséhez 1/25 hektár föld és 10/25 óra munka, 1 mázsa kukorica

termeléséhez 1/10 hektár föld és 4/10 óra munka szükséges. Tehát a feladat modellje:

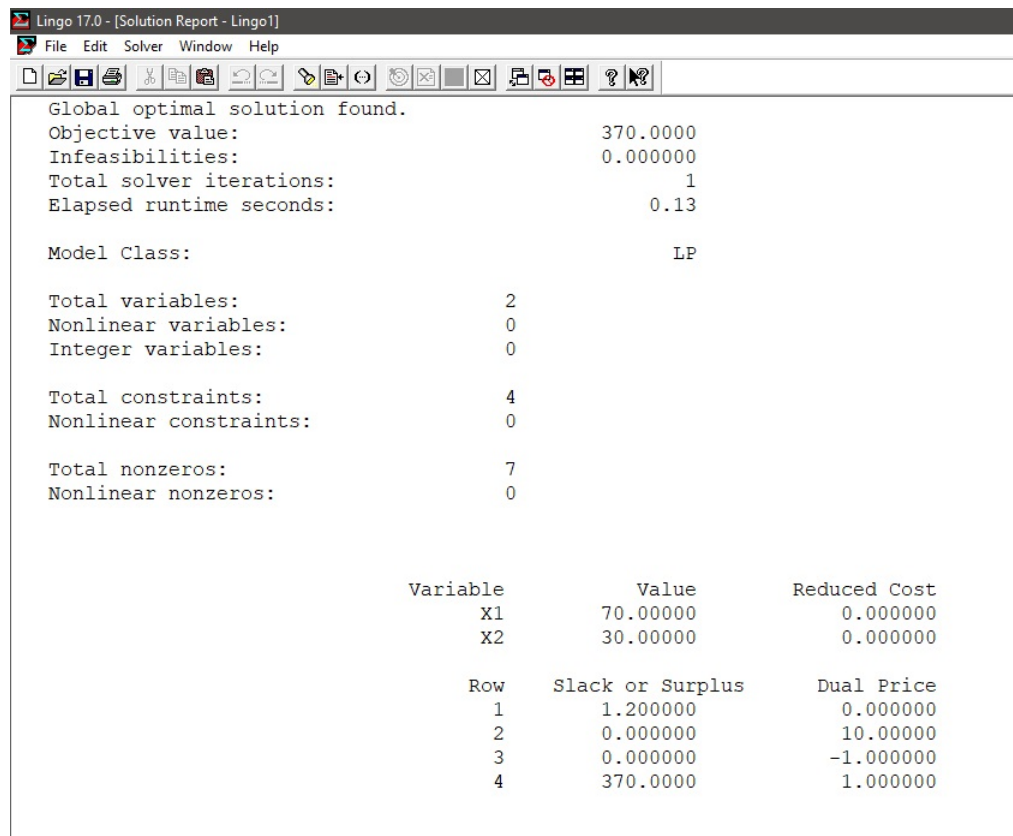
$$\begin{aligned}x_1, x_2 &\geq 0 \\ \frac{x_1}{25} + \frac{x_2}{10} &\leq 7 \\ \frac{2x_1}{5} + \frac{2x_2}{5} &\leq 40 \\ x_2 &\geq 30 \\ z = 4x_1 + 3x_2 &\rightarrow \max\end{aligned}$$

A modell felvétele a Lingoban:



```
Lingo 17.0 - [Lingo Model - Lingo1]
File Edit Solver Window Help
x1/25+x2/10<7;
2*x1/5+2*x2/5<40;
x2>30;
max=4*x1+3*x2;
```

Az eredményjelentés:



```
Lingo 17.0 - [Solution Report - Lingo1]
File Edit Solver Window Help
Global optimal solution found.
Objective value: 370.0000
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 1
Elapsed runtime seconds: 0.13

Model Class: LP

Total variables: 2
Nonlinear variables: 0
Integer variables: 0

Total constraints: 4
Nonlinear constraints: 0

Total nonzeros: 7
Nonlinear nonzeros: 0

Variable Value Reduced Cost
X1 70.00000 0.000000
X2 30.00000 0.000000

Row Slack or Surplus Dual Price
1 1.200000 0.000000
2 0.000000 10.00000
3 0.000000 -1.000000
4 370.0000 1.000000
```

Tehát a feladat optimális megoldása:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 70 \\ 30 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 370.$$

Látható, hogy a megoldásunk megegyezik az előző feladatban kapott megoldással, természetesen azzal a különbséggel, hogy itt a változók az adott növényből termelt mennyiséget jelentik. Ha összevetjük az előző feladattal, adódik, hogy 2.8 hektáron éppen  $25 \cdot 2.8 = 70$  mázsa árpát, 3 hektáron pedig  $10 \cdot 3 = 30$  mázsa kukoricát tud a gazdálkodó termelni. Az eltérések és a célfüggvény értéke megegyezik az előző modellben kapottal. A feladat arra mutat egy példát, hogy adott esetben többféle modellel is dolgozhatunk, ezek azonban nem vezethetnek eltérő értelmezésű megoldásra.

- (3) Kétféle süteményt sütünk, csokoládésat és gesztenyekrémeset. Egy csokoládés süteményt 1 euróért tudunk eladni, és a készítéséhez 4 darab tojást és 12 dkg lisztet kell felhasználnunk. Egy gesztenyes sütemény 70 centért adható el, a készítéséhez 1 darab tojást és 15 dkg lisztet használunk fel. Összesen 30 tojás és 3 kg liszt áll rendelkezésünkre a sütéshez. Írjuk fel a feladat matematikai modelljét, ha célunk, hogy a sütemények eladásából származó bevételt maximalizáljuk! Határozzuk meg az optimális megoldást!

**Megoldás:** A feladat matematikai modelljében jelölje  $x_1$  a készített csokoládés,  $x_2$  pedig a készített gesztenyes sütemények számát! Ebből adódik, hogy mindkét változó csak nem-negatív egész értékű lehet. A modell:

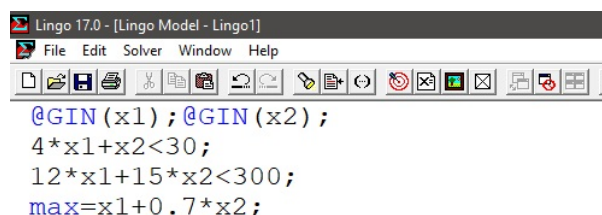
$$x_1, x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

$$4x_1 + x_2 \leq 30$$

$$12x_1 + 15x_2 \leq 300$$

$$z = x_1 + 0.7x_2 \rightarrow \max$$

A modell felvétele a Lingóban:



## Az eredményjelentés:

Lingo 17.0 - [Solution Report - Lingo1]		
File Edit Solver Window Help		
Global optimal solution found.		
Objective value:	14.90000	
Objective bound:	14.90000	
Infeasibilities:	0.000000	
Extended solver steps:	0	
Total solver iterations:	4	
Elapsed runtime seconds:	0.25	
Model Class:	PILP	
Total variables:	2	
Nonlinear variables:	0	
Integer variables:	2	
Total constraints:	3	
Nonlinear constraints:	0	
Total nonzeros:	6	
Nonlinear nonzeros:	0	

Variable	Value	Reduced Cost
X1	3.000000	-1.000000
X2	17.00000	-0.700000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	1.000000	0.000000
2	9.000000	0.000000
3	14.90000	1.000000

A feladat optimális megoldása:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 17 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 14.9$$

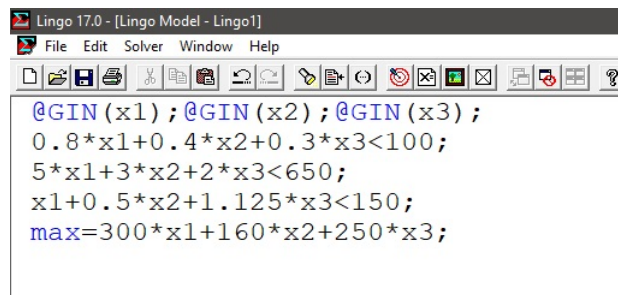
Tehát 3 darab csokoládés és 17 darab gesztenyes süteményt készítünk, a bevétel ekkor 14 euró és 90 cent. A fentiek alapján ekkor megmarad 1 tojás és 9 dkg liszt.

- (4) Egy bútorgyárban asztalokat, székeket és könyvespolcokat gyártanak. A faanyagok le-  
szabására használt gépek napi összkapacitása 100 munkaóra, egy asztal, szék illetve polc  
leszabása 0.8, 0.4 illetve 0.3 óra. A termékek festési ideje 5, 3 illetve 2 munkaóra, a festésre  
használt gépek összkapacitása napi 650 munkaóra. Az elkészült termékeket egy 150 m<sup>2</sup>-  
es raktárban tárolják, melyből minden nap a gyártás előtt elszállítják a bútorokat. Tehát  
minden nap csak annyi termék gyártható, amennyi a raktárban elfér, mert a raktáron kívül  
nem tárolhatják a kész termékeket. A termékek fajlagos helyigénye rendre 1, 0.5 és 1.125  
m<sup>2</sup>. Az asztalok 300, a székek 160, a polcok 250 pénzegység nyereséget hoznak darabonként.  
Írjuk fel a feladat matematikai modelljét és az optimális megoldást, ha célunk a maximális  
nyereség elérése!

**Megoldás:** Jelöljék az  $x_1, x_2, x_3$  döntési változók rendre a gyártott asztalok, székek és könyvespolcok számát! Ekkor mindegyik változó csak nemnegatív egész értékű lehet. Tehát a matematikai modell:

$$\begin{aligned} x_1, x_2, x_3 &\geq 0, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z} \\ 0.8x_1 + 0.4x_2 + 0.3x_3 &\leq 100 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\leq 650 \\ x_1 + 0.5x_2 + 1.125x_3 &\leq 150 \\ z = 300x_1 + 160x_2 + 250x_3 &\rightarrow \max \end{aligned}$$

A modell felvétele a Lingoban:

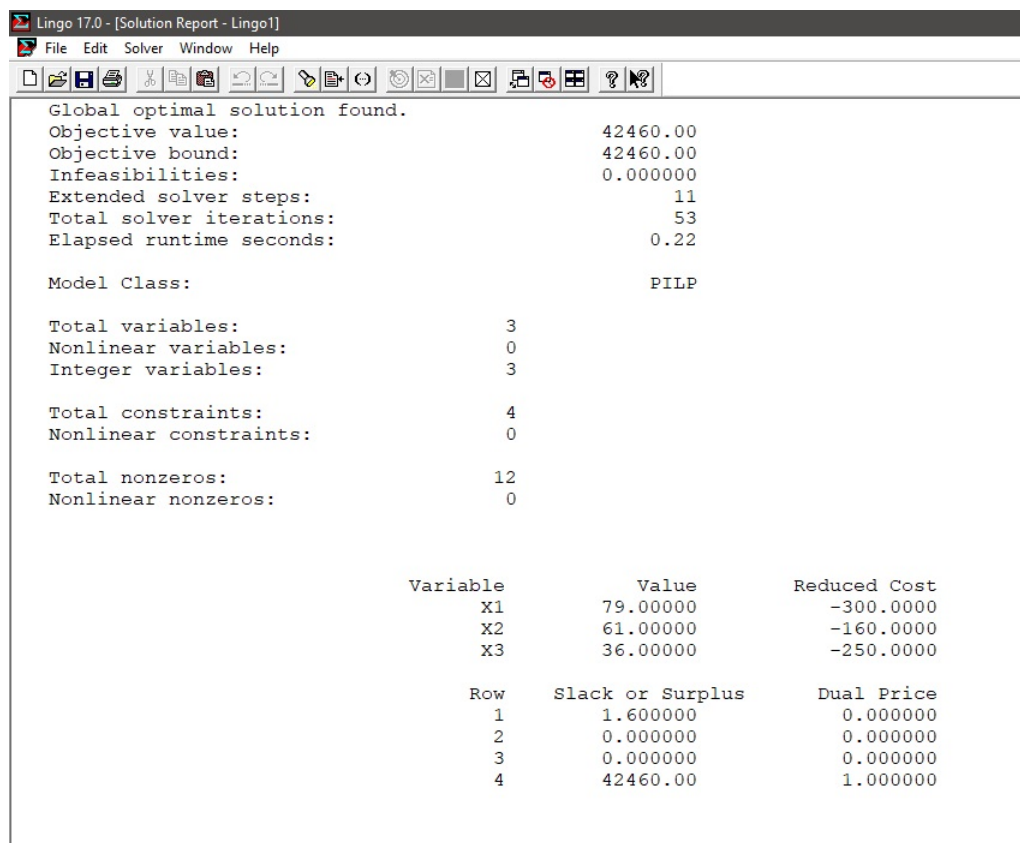


```

Lingo 17.0 - [Lingo Model - Lingo1]
File Edit Solver Window Help
@GIN (x1) ; @GIN (x2) ; @GIN (x3) ;
0.8*x1+0.4*x2+0.3*x3<100;
5*x1+3*x2+2*x3<650;
x1+0.5*x2+1.125*x3<150;
max=300*x1+160*x2+250*x3;

```

Az eredményjelentés:



```

Lingo 17.0 - [Solution Report - Lingo1]
File Edit Solver Window Help
Global optimal solution found.
Objective value:                42460.00
Objective bound:                42460.00
Infeasibilities:                0.000000
Extended solver steps:          11
Total solver iterations:        53
Elapsed runtime seconds:        0.22

Model Class:                    PILP

Total variables:                 3
Nonlinear variables:             0
Integer variables:               3

Total constraints:               4
Nonlinear constraints:           0

Total nonzeros:                 12
Nonlinear nonzeros:             0

Variable      Value      Reduced Cost
X1            79.00000    -300.0000
X2            61.00000    -160.0000
X3            36.00000    -250.0000

Row    Slack or Surplus    Dual Price
1      1.600000            0.000000
2      0.000000            0.000000
3      0.000000            0.000000
4      42460.00            1.000000

```

Tehát a feladat optimális megoldása:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 79 \\ 61 \\ 36 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 1.6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 42\,460$$

Azaz a legnagyobb nyereséget az biztosítja, ha 79 asztalt, 61 széket és 36 könyvespolcot gyártunk, ekkor hasznunk 42 460 pénzegység. Az eltérésváltozók alapján a faanyagok leszabására rendelkezésre álló keretből 1.6 munkaóra megmarad, viszont a festési munkaórákat és a raktári kapacitást teljes mértékben kihasználjuk.

- (5) Egy gyárban terepjárókat, mikrobuszokat és teherautókat gyártanak. Egy terepjáró gyártásához 1.5 tonna acél és 30 munkaóra, egy mikrobusz gyártásához 3 tonna acél és 25 munkaóra, egy teherautó gyártásához pedig 5 tonna acél és 40 munkaóra szükséges. Jelenleg 6 000 tonna acél és 60 000 munkaóra áll rendelkezésre. Egy terepjárón a nyereség 200 €, egy mikrobuszon 300 €, egy teherautón 400 €. Írjuk fel a feladat matematikai modelljét és az optimális megoldást, ha a nyereség maximalizálása a célunk!

**Megoldás:** Jelöljék az  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  döntési változók rendre a gyártott terepjárók, mikrobuszok és teherautók számát! Mindegyik változó csak nemnegatív egész értékű lehet. A feladat modellje:

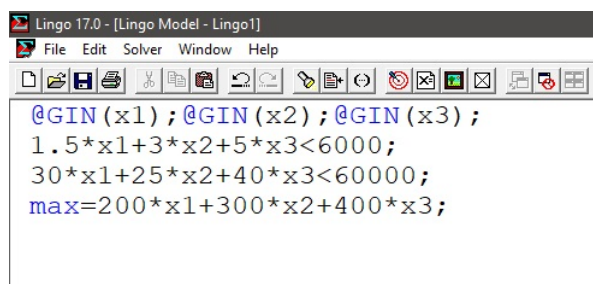
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$$

$$1.5x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 6000$$

$$30x_1 + 25x_2 + 40x_3 \leq 60000$$

$$z = 200x_1 + 300x_2 + 400x_3 \rightarrow \max$$

A modell felvétele a Lingóban:



```
Lingo 17.0 - [Lingo Model - Lingo1]
File Edit Solver Window Help
@GIN (x1) ; @GIN (x2) ; @GIN (x3) ;
1.5*x1+3*x2+5*x3<6000;
30*x1+25*x2+40*x3<60000;
max=200*x1+300*x2+400*x3;
```

## Az eredményjelentés:

Lingo 17.0 - [Solution Report - Lingo1]			
File Edit Solver Window Help			
<div> </div>			
Global optimal solution found.			
Objective value:		628500.0	
Objective bound:		628500.0	
Infeasibilities:		0.000000	
Extended solver steps:		0	
Total solver iterations:		4	
Elapsed runtime seconds:		0.07	
Model Class:		PILP	
Total variables:	3		
Nonlinear variables:	0		
Integer variables:	3		
Total constraints:	3		
Nonlinear constraints:	0		
Total nonzeros:	9		
Nonlinear nonzeros:	0		
	Variable	Value	Reduced Cost
	X1	570.0000	-200.0000
	X2	1715.000	-300.0000
	X3	0.000000	-400.0000
	Row	Slack or Surplus	Dual Price
	1	0.000000	0.000000
	2	25.00000	0.000000
	3	628500.0	1.000000

A feladat optimális megoldása:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 570 \\ 1715 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 628\,500$$

Tehát a legjobb nyereséget úgy érhetjük el, ha 570 terepjárót és 1 750 mikrobuszt állítunk elő, teherautót pedig nem gyártunk. Nyereségünk ekkor 628 500 €. A nyersanyagkeretet teljesen felhasználjuk, viszont marad 25 fel nem használt munkaóra.

- (6) Az étrendem összeállításához jelenleg a következő négyféle étel áll rendelkezésemre: csokis sütemény, csokifagylalt, kóla és túró torta. A csokis sütemény darabja 50 cent, a csokifagylaltból egy gombóc 20 cent, egy üveg kóla 30 cent és minden szelet túró torta 80 cent. Minden nap el kell fogyasztanom legalább 500 kalóriát, 6 deka csokoládét, 10 deka cukrot és 8 deka zsiradékot. Az élelmiszerek fajtánként tápértékét a következő táblázat mutatja:

	Kalória	Csokoládé (dkg)	Cukor (dkg)	Zsiradék (dkg)
Csokis sütemény	400	3	2	2
Csokifagylalt (1 gombóc)	200	2	2	4
Kóla (1 üveg)	150	0	4	1
Túró torta (1 szelet)	500	0	4	5



Adjuk meg a modellt, mellyel minimális költséggel teljesíthetők a napi tápértékszükségletek!  
Határozzuk meg az optimális megoldást!

**Megoldás:** A feladat modelljében jelöljük rendre az  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  és  $x_4$  döntési változókkal a naponta elfogyasztott csokis sütemények, csokifagylalt gombócok, palack kólák és túrótorta szeletek számát! Ekkor a modell:

$$\begin{aligned} x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \\ 400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4 &\geq 500 \\ 3x_1 + 2x_2 &\geq 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 &\geq 10 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 &\geq 8 \\ z = 50x_1 + 20x_2 + 30x_3 + 80x_4 &\rightarrow \min \end{aligned}$$

A modell felvétele a Lingoban:

```

Lingo 17.0 - [Lingo Model - Lingo1]
File Edit Solver Window Help
400*x1+200*x2+150*x3+500*x4>500;
3*x1+2*x2>6;
2*x1+2*x2+4*x3+4*x4>10;
2*x1+4*x2+x3+5*x4>8;
min=50*x1+20*x2+30*x3+80*x4;

```

Az eredményjelentés:

Global optimal solution found.			
Objective value:		90.00000	
Infeasibilities:		0.000000	
Total solver iterations:		2	
Elapsed runtime seconds:		0.13	
Model Class:		LP	
Total variables:	4		
Nonlinear variables:	0		
Integer variables:	0		
Total constraints:	5		
Nonlinear constraints:	0		
Total nonzeros:	18		
Nonlinear nonzeros:	0		

Variable	Value	Reduced Cost
X1	0.000000	27.50000
X2	3.000000	0.000000
X3	1.000000	0.000000
X4	0.000000	50.00000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	250.0000	0.000000
2	0.000000	-2.500000
3	0.000000	-7.500000
4	5.000000	0.000000
5	90.00000	-1.000000

Tehát a feladat optimális megoldása:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 250 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 90$$

A minimális költség 90 cent, ehhez 3 gombóc csokifagylalt és 1 palack kóla szükséges. Az eltérések alapján ekkor 250 kalóriával és 5 dkg zsiradékkal fogyasztunk többet, mint az előírt mennyiség, csokoládéból és cukorból éppen a szükséges mennyiséget biztosítjuk.

- (7) Háromféle terméket állítanak elő három erőforrás felhasználásával. Az erőforrások felhasználását az egyes termékekben az alábbi technológiai mátrix adja meg (ahol a sorok az erőforrásoknak, az oszlopok a termékeknek felelnek meg):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A rendelkezésre álló erőforrásokból rendre legfeljebb 30, 20 illetve 35 egységet használhatunk fel a gyártás során. A kész termékek ára rendre 2, 1 illetve 4 pénzegység. Írjuk fel a matematikai modellt és az optimális megoldást, ha a bevétel maximalizálása a cél!

**Megoldás:** A modellben jelöljük az  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  változókkal rendre a termékekből gyártott mennyiségeket! Ekkor a modell:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

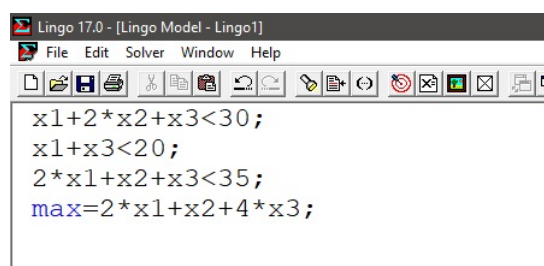
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 30$$

$$x_1 + x_3 \leq 20$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 35$$

$$z = 2x_1 + x_2 + 4x_3 \rightarrow \max$$

A modell felvétele a Lingóban:



```

Lingo 17.0 - [Lingo Model - Lingo1]
File Edit Solver Window Help
x1+2*x2+x3<30;
x1+x3<20;
2*x1+x2+x3<35;
max=2*x1+x2+4*x3;
  
```

## Az eredményjelentés:

Lingo 17.0 - [Solution Report - Lingo1]		
File Edit Solver Window Help		
Global optimal solution found.		
Objective value:		85.000000
Infeasibilities:		0.000000
Total solver iterations:		3
Elapsed runtime seconds:		0.05
Model Class:		LP
Total variables:	3	
Nonlinear variables:	0	
Integer variables:	0	
Total constraints:	4	
Nonlinear constraints:	0	
Total nonzeros:	11	
Nonlinear nonzeros:	0	

Variable	Value	Reduced Cost
X1	0.000000	2.000000
X2	5.000000	0.000000
X3	20.000000	0.000000
Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	0.000000	0.500000
2	0.000000	3.500000
3	10.000000	0.000000
4	85.000000	1.000000

Tehát a feladat optimális megoldása:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 20 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 85$$

Azaz az első terméket nem gyártjuk, a másodikból 5, a harmadikból 20 egységet gyártunk. Ekkor az első és a második erőforrást teljes mértékben felhasználjuk, a harmadikból marad 10 egység. Az elérhető legnagyobb bevétel 85 pénzegység.

- (8) Egy üzemben négyféle terméket állítanak elő három erőforrás felhasználásával. Az erőforrások felhasználását az egyes termékekben az alábbi technológiai mátrix adja meg:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A rendelkezésre álló erőforrásokból rendre legfeljebb 10, 20 illetve 30 egységet használhatunk fel a gyártás során. A kész termékek árai rendre 20, 50, 40 illetve 10 pénzegység. Írjuk fel a matematikai modellt és adjuk meg az optimális megoldást, ha a bevétel maximalizálása a cél! Egészítsük ki a feladat modelljét a következőkkel: az első termékből legalább 3 egységgel többet kell gyártanunk, mint a negyedikből, továbbá a harmadik termékből pontosan annyit kell gyártanunk, mint a másodikból és a negyedikből összesen! Mi lesz ekkor a megoldás?

**Megoldás:** A modellben jelöljük az  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  és  $x_4$  döntési változókkal rendre a termékekből gyártott mennyiségeket! A feladat szövege nem jelöl meg konkrét mértékegységet, ezért folytonos változókkal dolgozunk, tört megoldások is szóba jöhetnek. Ekkor a modell:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

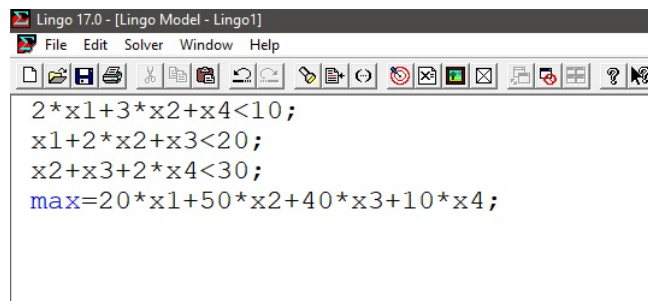
$$2x_1 + 3x_2 + x_4 \leq 10$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 20$$

$$x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 30$$

$$z = 20x_1 + 50x_2 + 40x_3 + 10x_4 \rightarrow \max$$

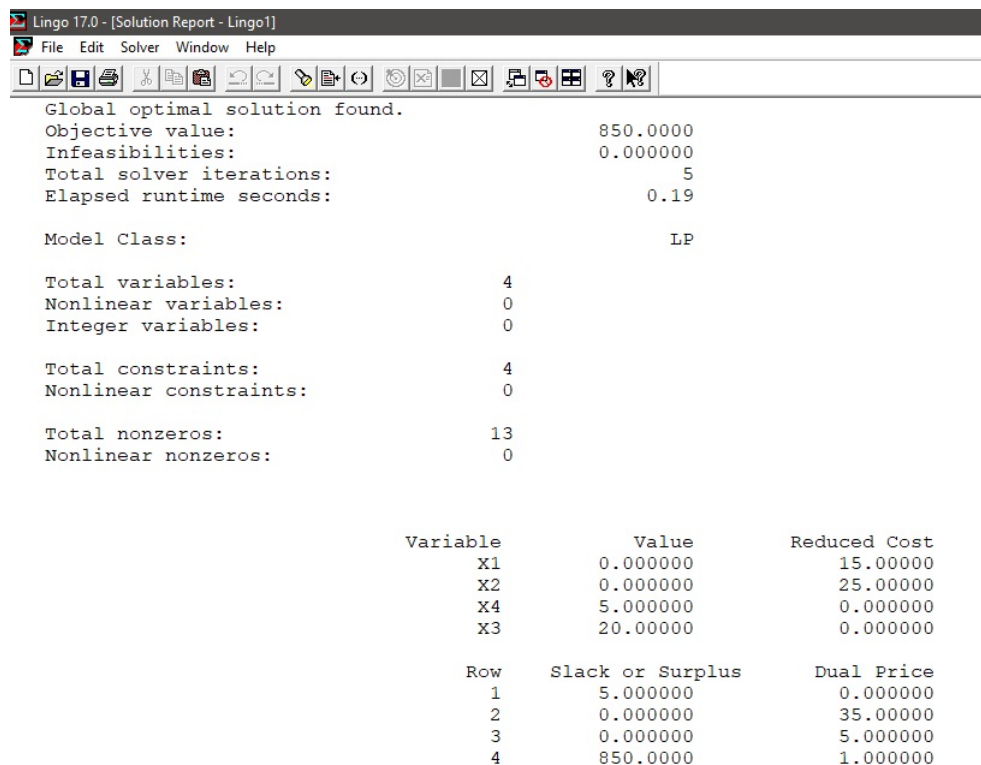
A modell felvétele a Lingóban:



```

Lingo 17.0 - [Lingo Model - Lingo1]
File Edit Solver Window Help
2*x1+3*x2+x4<10;
x1+2*x2+x3<20;
x2+x3+2*x4<30;
max=20*x1+50*x2+40*x3+10*x4;
  
```

Az eredményjelentés:



Global optimal solution found.		
Objective value:		850.0000
Infeasibilities:		0.000000
Total solver iterations:		5
Elapsed runtime seconds:		0.19
Model Class: LP		
Total variables:	4	
Nonlinear variables:	0	
Integer variables:	0	
Total constraints:	4	
Nonlinear constraints:	0	
Total nonzeros:	13	
Nonlinear nonzeros:	0	

Variable	Value	Reduced Cost
X1	0.000000	15.00000
X2	0.000000	25.00000
X4	5.000000	0.000000
X3	20.00000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	5.000000	0.000000
2	0.000000	35.00000
3	0.000000	5.000000
4	850.0000	1.000000

Tehát a feladat optimális megoldása:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 850$$

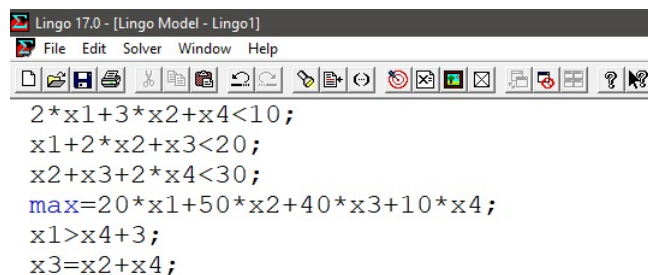
Az első és a második fajta terméket nem gyártjuk, a harmadikból 20, a negyedikből 5 egységet gyártunk (fontos figyelni a Lingo eredményjelentésében a változók sorrendjére). Az első erőforrásból 5 egység szabad kapacitás marad, a második és a harmadik erőforrást teljesen felhasználjuk. A bevételünk optimális esetben 850 pénzegység.

A második részben a modell kiegészítése:

$$x_1 \geq x_4 + 3$$

$$x_3 = x_2 + x_4$$

A programban ezt bárhova írhatjuk a modellben:

The image shows a screenshot of the Lingo 17.0 software window. The title bar reads "Lingo 17.0 - [Lingo Model - Lingo1]". Below the title bar is a menu bar with "File", "Edit", "Solver", "Window", and "Help". Underneath the menu bar is a toolbar with various icons for file operations, editing, and solving. The main text area contains the following Lingo model code:

```
2*x1+3*x2+x4<10;  
x1+2*x2+x3<20;  
x2+x3+2*x4<30;  
max=20*x1+50*x2+40*x3+10*x4;  
x1>x4+3;  
x3=x2+x4;
```

## Az eredményjelentés:

Lingo 17.0 - [Solution Report - Lingo1]		
File Edit Solver Window Help		
Global optimal solution found.		
Objective value:		180.0000
Infeasibilities:		0.000000
Total solver iterations:		6
Elapsed runtime seconds:		0.06
Model Class:		LP
Total variables:	4	
Nonlinear variables:	0	
Integer variables:	0	
Total constraints:	6	
Nonlinear constraints:	0	
Total nonzeros:	18	
Nonlinear nonzeros:	0	

Variable	Value	Reduced Cost
X1	3.000000	0.000000
X2	1.333333	0.000000
X4	0.000000	20.00000
X3	1.333333	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	0.000000	30.00000
2	13.00000	0.000000
3	27.33333	0.000000
4	180.0000	1.000000
5	0.000000	-40.00000
6	0.000000	40.00000

Tehát a feladat optimális megoldása:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4/3 \\ 4/3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 13 \\ 82/3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 180$$

A megoldás a fentiek szerint változott. Fontos, hogy mivel a Lingo modellben a célfüggvény középen, a negyedik sorban szerepel, az eltérések közül a negyedik sor tartalmazza a célfüggvény értékét, tehát ez nem tényleges eltérésváltozója a feladatnak, nem írjuk az eltérésvektorba.

- (9) Egy üzemben négyféle terméket állítanak elő három erőforrás felhasználásával. Az erőforrások felhasználását az egyes termékekben az alábbi technológiai mátrix adja meg (ahol a sorok az erőforrásoknak, az oszlopok a termékeknek felelnek meg):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Az első és a második kapacitásra vonatkozó felső korlát 90 illetve 80 egység, a harmadik erőforrásból viszont legalább 50 egységet fel kell használnunk. Feltétel továbbá, hogy a

második termékből pontosan 5 egységgel több kell, mint a negyedikebből. A kész termékek árai rendre 2, 3, 1, 2 pénzegység. Adjuk meg a matematikai modellt, és határozzuk meg az optimális megoldást, ha a bevétel maximalizálása a cél! Az első termék esetén egységenként 1, a harmadik termék esetén egységenként 2 pénzegység költség merül fel a gyártás során, valamint 300 pénzegység fix költség is. Írjunk fel egy olyan új célfüggvényt, mellyel a költségre eső optimumot kereshetjük! Mi lesz ekkor a megoldás?

**Megoldás:** A modellben jelöljük az  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  és  $x_4$  döntési változókkal rendre a termékekből gyártott mennyiségeket! Ekkor a modell:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 \leq 90$$

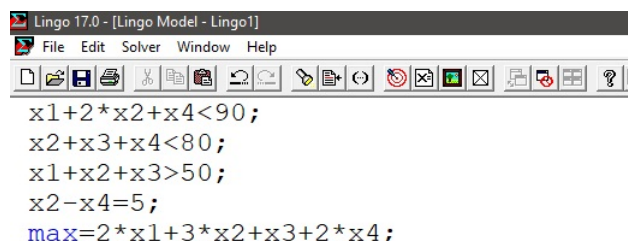
$$x_2 + x_3 + x_4 \leq 80$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 50$$

$$x_2 - x_4 = 5$$

$$z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \rightarrow \max$$

A modell felvétele a Lingóban:



The screenshot shows the Lingo 17.0 application window titled "Lingo 17.0 - [Lingo Model - Lingo1]". The menu bar includes "File", "Edit", "Solver", "Window", and "Help". Below the menu bar is a toolbar with various icons for file operations, editing, and solving. The main text area contains the following Lingo model code:

```
x1+2*x2+x4<90;  
x2+x3+x4<80;  
x1+x2+x3>50;  
x2-x4=5;  
max=2*x1+3*x2+x3+2*x4;
```

## Az eredményjelentés:

Lingo 17.0 - [Solution Report - Lingo1]		
File Edit Solver Window Help		
Global optimal solution found.		
Objective value:		250.0000
Infeasibilities:		0.000000
Total solver iterations:		3
Elapsed runtime seconds:		0.07
Model Class:		LP
Total variables:	4	
Nonlinear variables:	0	
Integer variables:	0	
Total constraints:	5	
Nonlinear constraints:	0	
Total nonzeros:	15	
Nonlinear nonzeros:	0	

Variable	Value	Reduced Cost
X1	80.00000	0.000000
X2	5.000000	0.000000
X4	0.000000	3.000000
X3	75.00000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	0.000000	2.000000
2	0.000000	1.000000
3	110.0000	0.000000
4	0.000000	-2.000000
5	250.0000	1.000000

A feladat optimális megoldása:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 80 \\ 5 \\ 75 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 110 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 250$$

Tehát az első termékből 80, a másodikból 5 és a harmadikból 75 egységet gyártunk, a negyediket nem gyártjuk. Ezzel a gyártási programmal elérhető az optimális bevétel, mely 250 pénzegység. Az eltérések alapján a harmadik feltétel alsó korlátját 110 egységgel teljesítjük túl (tehát itt a harmadik valójában többletváltozó), a többi feltétel mind szigorú egyenlőséggel teljesül.

A feladat második részében az új célfüggvény:

$$z = \frac{2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4}{x_1 + 2x_3 + 300} \rightarrow \max$$

Az új modell a Lingóban:

```
Lingo 17.0 - [Lingo Model - Lingo1]
File Edit Solver Window Help
x1+2*x2+x4<90;
x2+x3+x4<80;
x1+x2+x3>50;
x2-x4=5;
max=(2*x1+3*x2+x3+2*x4) / (x1+2*x3+300);
```



Az eredményjelentés:

Lingo 17.0 - [Solution Report - Lingo1]		
File Edit Solver Window Help		
Local optimal solution found.		
Objective value:	0.4951456	
Infeasibilities:	0.000000	
Extended solver steps:	5	
Best multistart solution found at step:	1	
Total solver iterations:	28	
Elapsed runtime seconds:	0.26	
Model Class:	NLP	
Total variables:	4	
Nonlinear variables:	4	
Integer variables:	0	
Total constraints:	5	
Nonlinear constraints:	1	
Total nonzeros:	15	
Nonlinear nonzeros:	4	

Variable	Value	Reduced Cost
X1	0.000000	0.4524460E-03
X2	31.66667	0.000000
X4	26.66667	0.000000
X3	21.66667	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	0.000000	0.4835517E-02
2	0.000000	0.2827788E-04
3	3.333333	0.000000
4	0.000000	-0.9614478E-03
5	0.4951456	1.000000

A feladat optimális megoldása:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 95/3 \\ 65/3 \\ 80/3 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10/3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 0.4951456$$

- (10) Asztalokat és székeket gyártunk. Minden asztalnak és széknek vagy teljes egészében tölgyből, vagy teljes egészében fenyőből kell készülnie. Tölgyből 150 lap, fenyőből 210 lap áll rendelkezésünkre. Egy asztalhoz 17 lap tölgy vagy 30 lap fenyő felhasználása szükséges, egy székhez pedig 5 lap tölgy vagy 13 lap fenyő. Az asztalt 40 euróért, a széket 15 euróért értékesíthetjük darabonként. Írjunk fel egy matematikai modellt, mellyel maximalizálni tudjuk a bevételünket! Adjuk meg az optimális megoldást!

**Megoldás:** A modellünkben jelölje  $x_1$  a tölgyből készült asztalok,  $x_2$  pedig a tölgyből készült székek számát, továbbá jelölje  $y_1$  a fenyőből készült asztalok,  $y_2$  pedig a fenyőből készült székek számát! Ekkor az összes változó csak nemnegatív egész értékű lehet. A matematikai modell:

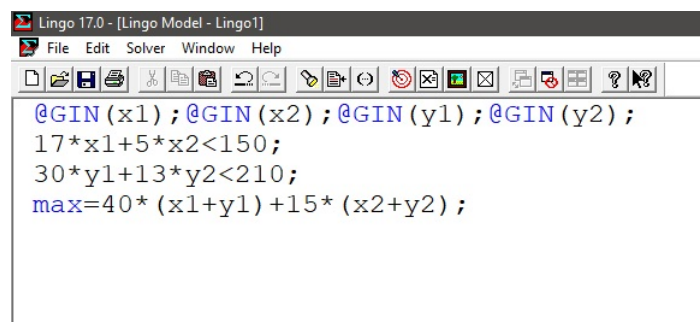
$$x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0, \quad x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$$

$$17x_1 + 5x_2 \leq 150$$

$$30y_1 + 13y_2 \leq 210$$

$$z = 40(x_1 + y_1) + 15(x_2 + y_2) \rightarrow \max$$

A modell a Lingoban:

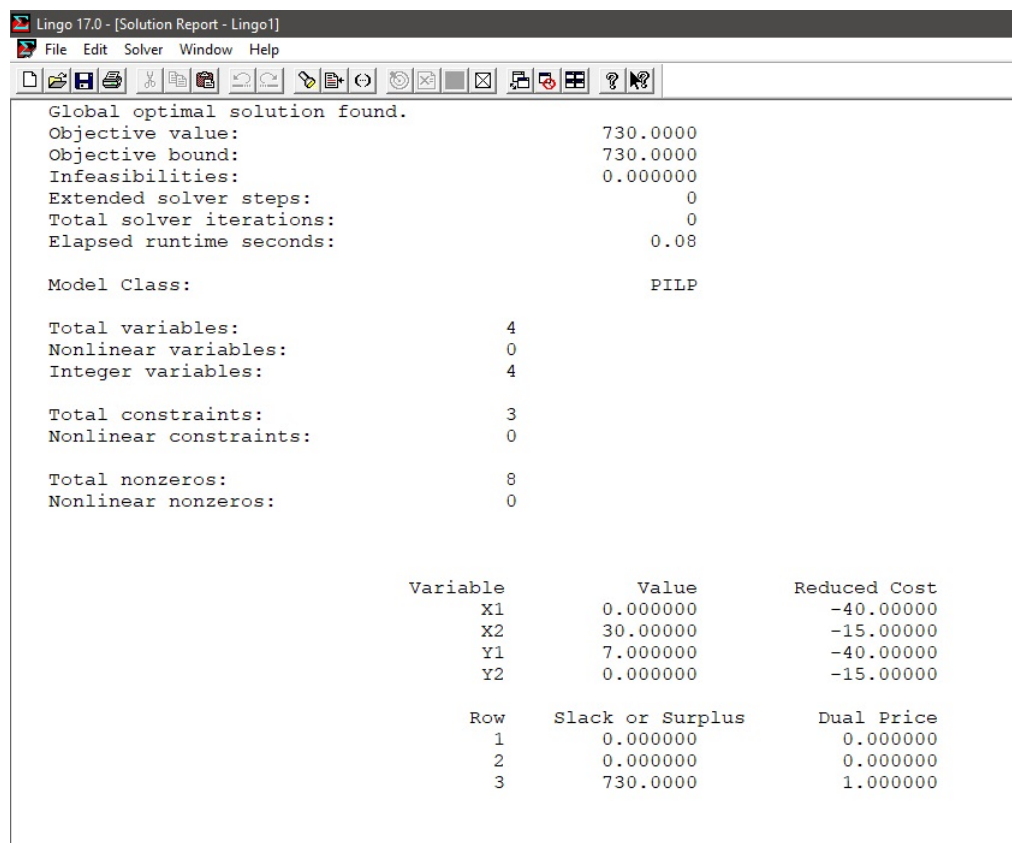


```

Lingo 17.0 - [Lingo Model - Lingo1]
File Edit Solver Window Help
@GIN(x1); @GIN(x2); @GIN(y1); @GIN(y2);
17*x1+5*x2<150;
30*y1+13*y2<210;
max=40*(x1+y1)+15*(x2+y2);

```

Az eredményjelentés:



```

Lingo 17.0 - [Solution Report - Lingo1]
File Edit Solver Window Help

Global optimal solution found.
Objective value:                730.0000
Objective bound:                730.0000
Infeasibilities:                0.000000
Extended solver steps:          0
Total solver iterations:         0
Elapsed runtime seconds:        0.08

Model Class:                    PILP

Total variables:                 4
Nonlinear variables:             0
Integer variables:               4

Total constraints:               3
Nonlinear constraints:           0

Total nonzeros:                  8
Nonlinear nonzeros:              0

Variable      Value      Reduced Cost
X1            0.000000    -40.000000
X2            30.000000    -15.000000
Y1            7.000000    -40.000000
Y2            0.000000    -15.000000

Row    Slack or Surplus    Dual Price
1      0.000000            0.000000
2      0.000000            0.000000
3      730.0000            1.000000

```

A feladat optimális megoldása:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 730$$

Ez alapján az optimális 730 eurós bevétel úgy érhető el, ha készítünk 30 széket tölgyből és 7 asztalt fenyőből. Ekkor mindkét fafajtából felhasználjuk az összes alapanyagot.

- (11) Egy bányásznak legalább 12 kg aranyat és legalább 18 kg ezüstöt kell találnia minden hónapban ahhoz, hogy ezeket eladva az adott hónapban meg tudjon élni. Két kis bányája van. Ha egész nap az első bányában dolgozik, akkor 2 kg aranyat és 2 kg ezüstöt tud kitermelni. Ha egész nap a második bányában dolgozik, akkor 1 kg aranyat és 3 kg ezüstöt tud kitermelni. Írjunk fel egy lineáris programozási modellt, mellyel a bányász teljesíteni tudja a követelményeket, és a lehető legkevesebb időt tölti munkával! Adjuk meg az optimális megoldást!

**Megoldás:** A modellben jelölje  $x_1$  az első,  $x_2$  pedig a második bányában töltött napok számát! Ekkor mindkét változó nemnegatív, viszont tört értéket is felvehetnek, hiszen nem csak egész napokat tölthet a bányász az adott bányában. A feladat modellje:

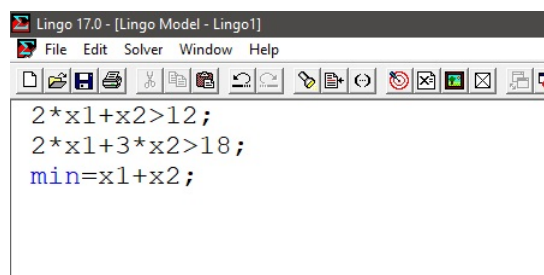
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$2x_1 + x_2 \geq 12$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 18$$


$$z = x_1 + x_2 \rightarrow \min$$

A modell a Lingoban:



```
Lingo 17.0 - [Lingo Model - Lingo1]
File Edit Solver Window Help
2*x1+x2>12;
2*x1+3*x2>18;
min=x1+x2;
```

Az eredményjelentés:



The screenshot shows the Lingo 17.0 [Solution Report - Lingo1] window. It contains a menu bar (File, Edit, Solver, Window, Help) and a toolbar. The main text area displays the following information:

Global optimal solution found.	
Objective value:	7.500000
Infeasibilities:	0.000000
Total solver iterations:	2
Elapsed runtime seconds:	0.07
Model Class: LP	
Total variables:	2
Nonlinear variables:	0
Integer variables:	0
Total constraints:	3
Nonlinear constraints:	0
Total nonzeros:	6
Nonlinear nonzeros:	0

Variable	Value	Reduced Cost
X1	4.500000	0.000000
X2	3.000000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	0.000000	-0.2500000
2	0.000000	-0.2500000
3	7.500000	-1.000000

A feladat optimális megoldása:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 4.5 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 7.5$$

Azaz a bányász 7 és fél nap alatt tudja legkorábban a szükséges mennyiséget kitermelni. Ebben az esetben 4 és fél napot tölt az első, és 3 napot a második bányában.

- (12) Négy konkrét befektetési lehetőséget vizsgálunk. A befektetések hozamának nettó jelenértéke rendre 5 000, 8 000, 6 000 és 7 000 euró. Az egyes befektetések jelenbeni készpénzigénye rendre 3 000, 5 000, 4 000 és 6 000 euró. Jelen pillanatban 11 000 euró készpénz a befektethető összeg, a befektetésekből törtrészt nem vásárolhatunk. Írjuk fel a probléma matematikai modelljét, ha célunk, hogy maximalizáljuk a befektetések összhozamának nettó jelenértékét! Mi lesz az optimális megoldás?

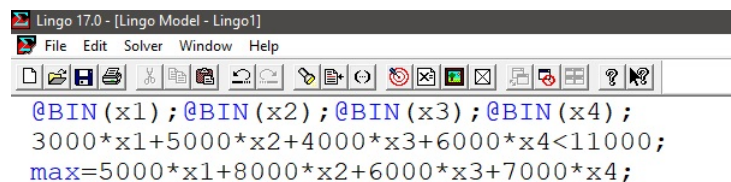
**Megoldás:** A feladat egy igen-nem döntési helyzetet ír le, a változókat ezért a tanultak alapján úgy választjuk meg, hogy  $i = 1, 2, 3, 4$  esetén az  $x_i$  változó pontosan akkor 1, ha választjuk az adott sorszámú befektetést, és 0, ha nem választjuk. Ekkor a feladat modellje:

$x_i$  bináris

$$3000x_1 + 5000x_2 + 4000x_3 + 6000x_4 \leq 11000$$

$$z = 5000x_1 + 8000x_2 + 6000x_3 + 7000x_4 \rightarrow \max$$

A modell a Lingóban:

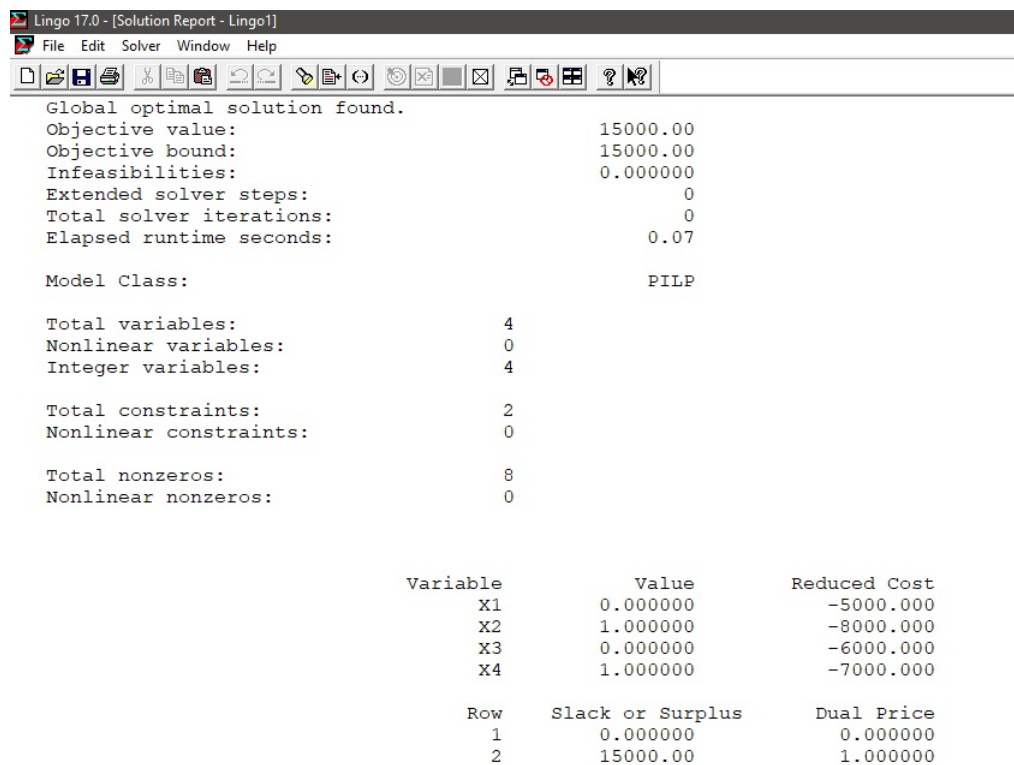


```

Lingo 17.0 - [Lingo Model - Lingo1]
File Edit Solver Window Help

@BIN (x1) ; @BIN (x2) ; @BIN (x3) ; @BIN (x4) ;
3000*x1+5000*x2+4000*x3+6000*x4<11000;
max=5000*x1+8000*x2+6000*x3+7000*x4;
  
```

Az eredményjelentés:



```

Lingo 17.0 - [Solution Report - Lingo1]
File Edit Solver Window Help

Global optimal solution found.
Objective value:                15000.00
Objective bound:                15000.00
Infeasibilities:                0.000000
Extended solver steps:          0
Total solver iterations:         0
Elapsed runtime seconds:         0.07

Model Class:                    PILP

Total variables:                 4
Nonlinear variables:             0
Integer variables:               4

Total constraints:               2
Nonlinear constraints:           0

Total nonzeros:                 8
Nonlinear nonzeros:             0

Variable      Value      Reduced Cost
X1            0.000000    -5000.000
X2            1.000000    -8000.000
X3            0.000000    -6000.000
X4            1.000000    -7000.000

Row    Slack or Surplus    Dual Price
1      0.000000            0.000000
2      15000.00            1.000000
  
```

A feladat optimális megoldása:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_0 = 0, \quad z_0 = 15\,000$$

Azaz a második és a negyedik befektetést kell választanunk, ekkor a rendelkezésre álló készpénzkeretet teljesen kihasználva az elérhető legjobb hozam 15 000 euró.

- (13) Négy konkrét befektetési lehetőséget vizsgálunk. A befektetések hozamának nettó jelenértéke rendre 5 000, 8 000, 3 000 és 7 000 euró. Az egyes befektetések jelenbeni készpénzigénye rendre 3 000, 5 000, 2 000 és 4 000 euró. Jelen pillanatban 6 000 euró készpénz a befektethető összeg, a befektetésekből törtrészt nem vásárolhatunk. Írjuk fel a probléma matematikai modelljét és határozzuk meg az optimális megoldást, ha célunk, hogy maximalizáljuk a befektetések összhozamának nettó jelenértékét!

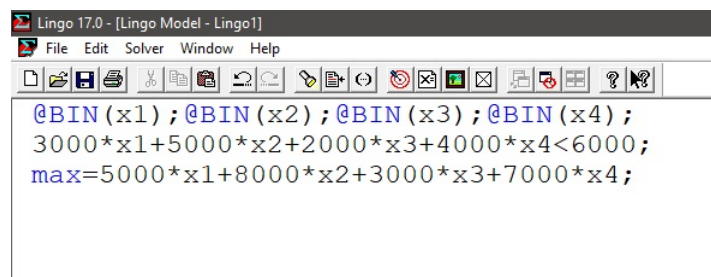
**Megoldás:** A feladat egy igen-nem döntési helyzetet ír le, a változókat ezért a tanultak alapján úgy választjuk meg, hogy  $i = 1, 2, 3, 4$  esetén az  $x_i$  változó pontosan akkor 1, ha választjuk az adott sorszámú befektetést, és 0, ha nem választjuk. Ekkor a feladat modellje:

$x_i$  bináris

$$3000x_1 + 5000x_2 + 2000x_3 + 4000x_4 \leq 6000$$

$$z = 5000x_1 + 8000x_2 + 3000x_3 + 7000x_4 \rightarrow \max$$

A modell a Lingóban:



```
Lingo 17.0 - [Lingo Model - Lingo1]
File Edit Solver Window Help
@BIN (x1) ; @BIN (x2) ; @BIN (x3) ; @BIN (x4) ;
3000*x1+5000*x2+2000*x3+4000*x4<6000;
max=5000*x1+8000*x2+3000*x3+7000*x4;
```

## Az eredményjelentés:

Lingo 17.0 - [Solution Report - Lingo1]		
File Edit Solver Window Help		
Global optimal solution found.		
Objective value:	10000.00	
Objective bound:	10000.00	
Infeasibilities:	0.000000	
Extended solver steps:	0	
Total solver iterations:	0	
Elapsed runtime seconds:	0.05	
Model Class: PILP		
Total variables:	4	
Nonlinear variables:	0	
Integer variables:	4	
Total constraints:	2	
Nonlinear constraints:	0	
Total nonzeros:	8	
Nonlinear nonzeros:	0	
Variable	Value	Reduced Cost
X1	0.000000	-5000.000
X2	0.000000	-8000.000
X3	1.000000	-3000.000
X4	1.000000	-7000.000
Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	0.000000	0.000000
2	10000.00	1.000000

A feladat optimális megoldása:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_0 = 0, \quad z_0 = 10\,000$$

Azaz a harmadik és a negyedik befektetést kell választanunk, ekkor a rendelkezésre álló készpénzkeretet teljesen kihasználva az elérhető legjobb hozam 10 000 euró.

- (14) Egy bank igazgatósága azt akarja eldönteni, hogy hová fektesse be a bank pénzét. Jelenleg 500 000 euró sorsáról kell dönteniük. A pénzt kötvényekbe, lakáskölcsönökbe, árukölcsönökbe és személyi kölcsönökbe fektethetik. Az éves hozam kötvényekre 10 %, lakáskölcsönökre 12 %, árukölcsönökre 10 % és személyi kölcsönökre 8 %. Kockázati szempontokat figyelembe véve a bank vezetése úgy dönt, hogy a személyi kölcsönökbe fektetett összeg nem lehet több, mint a kötvényekbe fektetett összeg, és a lakáskölcsönökbe fektetett összeg nem lehet több, mint az árukölcsönökbe fektetett összeg. Továbbá úgy döntenek, hogy személyi kölcsönökbe legfeljebb a teljes összeg ötödét fogják fektetni. Írjuk fel a matematikai modellt, ha a bank vezetésének célja, hogy maximalizálja portfóliójának évi profitját! Adjuk meg a feladat optimális megoldását!

**Megoldás:** A modellben jelölje  $x_1$  a kötvényekbe,  $x_2$  a lakáskölcsönökbe,  $x_3$  az árukölcsönökbe és  $x_4$  a személyi kölcsönökbe fektetett pénzt euróban! Ekkor a modell:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 500\,000$$

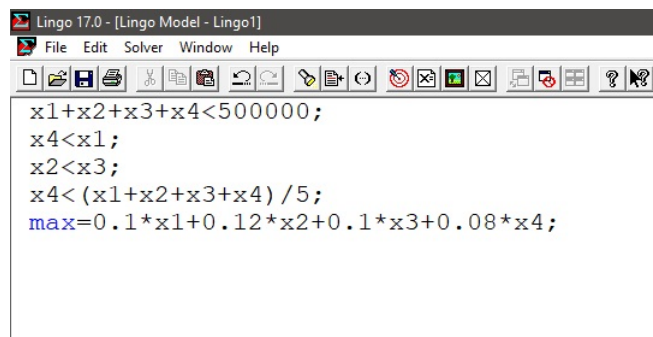
$$x_4 \leq x_1$$

$$x_2 \leq x_3$$

$$x_4 \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{5}$$

$$z = 0.1x_1 + 0.12x_2 + 0.1x_3 + 0.08x_4 \rightarrow \max$$

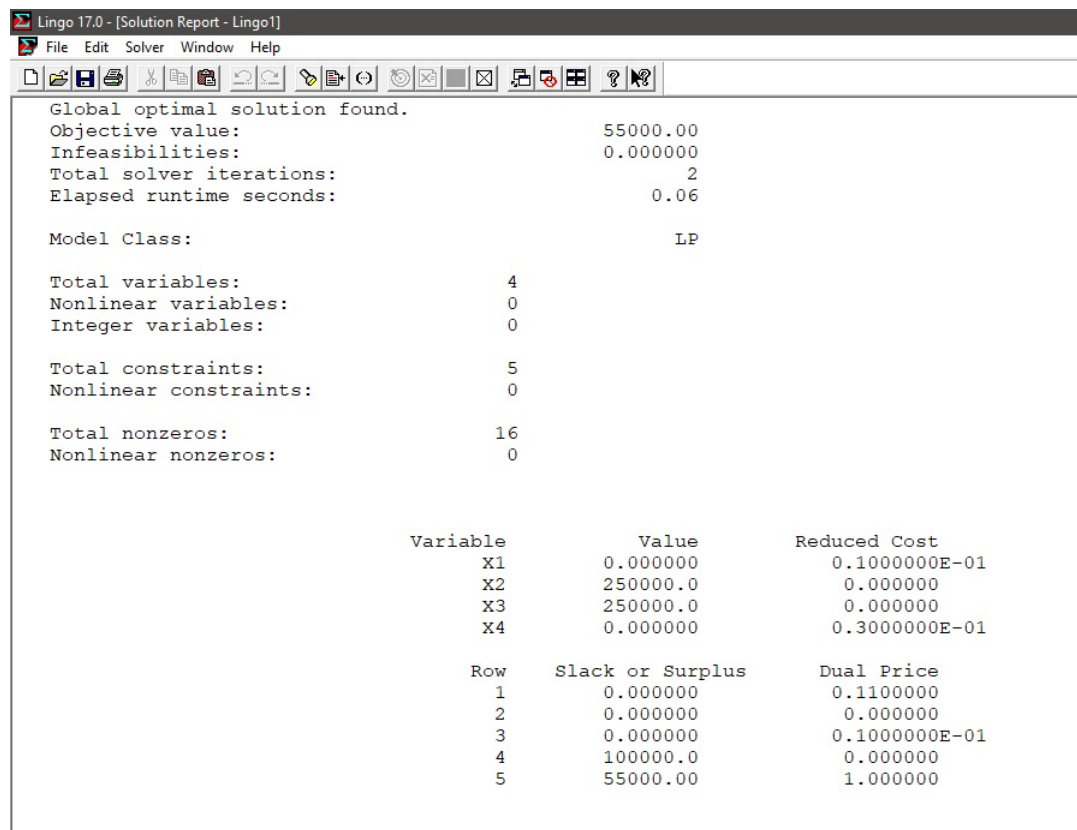
A modell a Lingóban:



```

Lingo 17.0 - [Lingo Model - Lingo1]
File Edit Solver Window Help
x1+x2+x3+x4<500000;
x4<x1;
x2<x3;
x4<(x1+x2+x3+x4)/5;
max=0.1*x1+0.12*x2+0.1*x3+0.08*x4;
  
```

Az eredményjelentés:



Lingo 17.0 - [Solution Report - Lingo1]			
File Edit Solver Window Help			
Global optimal solution found.			
Objective value:		55000.00	
Infeasibilities:		0.000000	
Total solver iterations:		2	
Elapsed runtime seconds:		0.06	
Model Class:		LP	
Total variables:	4		
Nonlinear variables:	0		
Integer variables:	0		
Total constraints:	5		
Nonlinear constraints:	0		
Total nonzeros:	16		
Nonlinear nonzeros:	0		
	Variable	Value	Reduced Cost
	X1	0.000000	0.1000000E-01
	X2	250000.0	0.000000
	X3	250000.0	0.000000
	X4	0.000000	0.3000000E-01
	Row	Slack or Surplus	Dual Price
	1	0.000000	0.1100000
	2	0.000000	0.000000
	3	0.000000	0.1000000E-01
	4	100000.0	0.000000
	5	55000.00	1.000000



A feladat optimális megoldása:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 250\,000 \\ 250\,000 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100\,000 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 55\,000$$

Azaz 250 ezer eurót kell befektetniük lakáskölcsönökbe és árukölcsönökbe is, kötvényekbe és személyi kölcsönökbe nem helyeznek el pénzt. Ekkor az elérhető optimális profit 55 ezer euró.

(15) Tízezer eurót szeretnénk befektetni. A következő három évre az alábbi lehetőségekből választhatunk:

- Az 1. befektetés esetén minden most elhelyezett euró egy év múlva 0.1, három év múlva 1.4 euró hasznot hoz.
- A 2. befektetés esetén minden most elhelyezett euró egy év múlva 0.2, két év múlva 1.2 euró hasznot hoz.
- A 3. befektetés esetén minden egy év múlva elhelyezett euró három év múlva 1.5 euró hasznot hoz.

Mindegyik befektetési formába legfeljebb 5 000 eurót helyezhetünk. Ha bármelyik évben marad nem befektetett pénzünk, akkor ezt az összeget leköthetjük, ami évi 6 %-os hozamot garantál. Írjunk fel egy olyan matematikai modellt, melynek segítségével maximalizálhatjuk a három év múlva rendelkezésre álló pénzünket! Adjuk meg az optimális megoldást!

**Megoldás:** A modellben jelölje  $x_1$ ,  $x_2$  és  $x_3$  rendre az adott sorszámú befektetésbe elhelyezett összeget, továbbá jelölje  $y_1$ ,  $y_2$  és  $y_3$  rendre az első, második és harmadik év elején lekötött összeget! Ekkor a matematikai modell:

$$\begin{aligned} x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 + y_1 &= 10\,000 \\ 0.1x_1 + 0.2x_2 + 1.06y_1 &= x_3 + y_2 \\ 1.2x_2 + 1.06y_2 &= y_3 \\ x_1 &\leq 5\,000 \\ x_2 &\leq 5\,000 \\ x_3 &\leq 5\,000 \\ z &= 1.4x_1 + 1.5x_3 + 1.06y_3 \rightarrow \max \end{aligned}$$

A modell a Lingóban:

```
Lingo 17.0 - [Lingo Model - Lingo1]
File Edit Solver Window Help

x1+x2+y1=10000;
0.1*x1+0.2*x2+1.06*y1=x3+y2;
1.2*x2+1.06*y2=y3;
x1<5000;
x2<5000;
x3<5000;
max=1.4*x1+1.5*x3+1.06*y3;
```

Az eredményjelentés:

Lingo 17.0 - [Solution Report - Lingo1]			
File Edit Solver Window Help			
Global optimal solution found.			
Objective value:		15755.83	
Infeasibilities:		0.000000	
Total solver iterations:		1	
Elapsed runtime seconds:		0.05	
Model Class:		LP	
Total variables:	6		
Nonlinear variables:	0		
Integer variables:	0		
Total constraints:	7		
Nonlinear constraints:	0		
Total nonzeros:	17		
Nonlinear nonzeros:	0		
	Variable	Value	Reduced Cost
	X1	1354.167	0.000000
	X2	5000.000	0.000000
	Y1	3645.833	0.000000
	X3	5000.000	0.000000
	Y2	0.000000	0.3347333
	Y3	6000.000	0.000000
	Row	Slack or Surplus	Dual Price
	1	0.000000	1.545833
	2	0.000000	-1.458333
	3	0.000000	-1.060000
	4	3645.833	0.000000
	5	0.000000	0.1783333E-01
	6	0.000000	0.4166667E-01
	7	15755.83	1.000000

A feladat optimális megoldása (kerekítve és a változókat a megfelelő sorrendbe írva):

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 1\,354.17 \\ 5\,000 \\ 5\,000 \\ 3\,645.83 \\ 0 \\ 6\,000 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3\,645.83 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 15\,755.83$$

Azaz a befektetésekre rendre 1 354, 5 000 és 5 000 eurót helyezünk el, az első év elején 3 646, a harmadik év elején pedig 6 000 eurót kötünk le. Így elérhető, hogy három év múlva 15 756 euró álljon rendelkezésünkre.